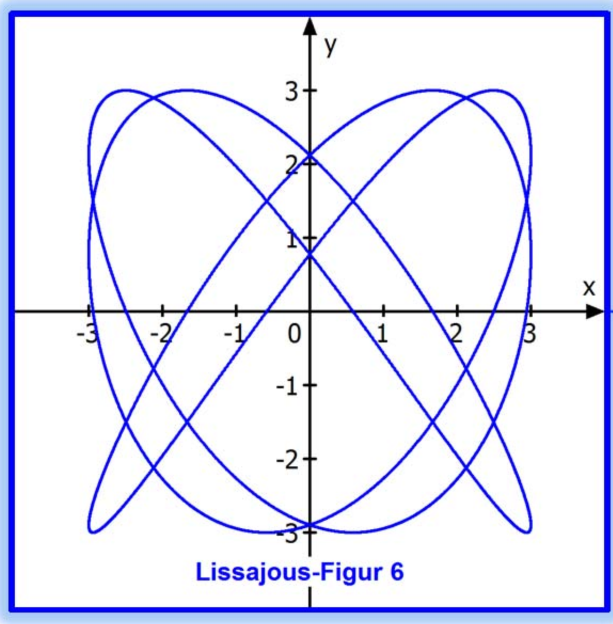



# Lissajous-Kurven

DEMO

Text Nummer: 54101

Stand: 28. März 2016

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

# Vorwort

Lissajous-Figuren sind Kurven, die man sehr gut durch physikalische Experimente erzeugen kann.
Dazu muss man zwei Schwingungen überlagern, die nicht „im gleichen Takt" schwingen.
Das kann man mit einem Fadenpendel machen, aber noch besser an einem Oszilloskop.
Siehe dazu https://de.wikipedia.org/wiki/Lissajous-Figur mit vielen Abbildungen.

# Inhalt



DEMO

# Lissajous-Figuren

## 1 Vorschau

Lissajous-Figuren entstehen, wenn man zwei zueinander senkrechte Schwingungen überlagert,

also je eine Sinusschwingung entlang der x-Achse und eine entlang der y-Achse.
Man kann also die allgemeinen Gleichungen z. B. so aufstellen:

$$x(t) = a_1 \cdot \sin(\omega_1 \cdot t + \varphi_1) \text{ und } y(t) = a_2 \cdot \sin(\omega_2 \cdot t + \varphi_2) \text{ mit } a_{1,2} > 0,\ t \geq 0$$

Man erhält die Kurven auch durch die vereinfachten Gleichungen:

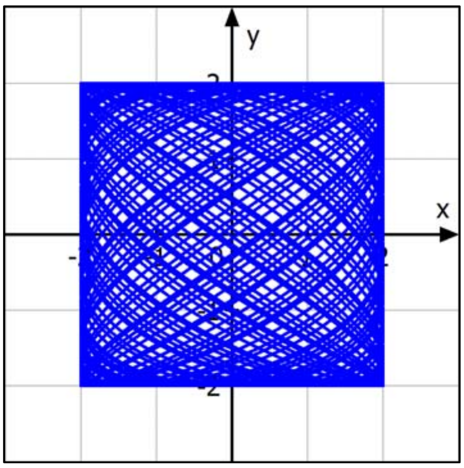
$$x(t) = a_1 \cdot \sin(\omega_1 t) \text{ und } y(t) = a_2 \cdot \sin(\omega_2 t + \varphi) \qquad \text{mit } a_{1,2} > 0,\ t \geq 0$$

Die Formen der Kurven hängen ab vom **Amplitudenverhältnis** $\frac{a_1}{a_2}$, **vom Frequenzverhältnis** $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ bzw. k in der vereinfachten Form sowie von der **Phasendifferenz** $\varphi_1 - \varphi_2$ bzw. $\varphi$ der beiden Schwingungen. Durch Variation dieser Kenndaten kann man beliebig viele unterschiedliche Figuren erzeugen, dazu gehören dann auch so „banale" Kurven wie Strecke, Kreis, Parabelbogen, Ellipse und natürlich dann alle die faszinierenden Kurvenbilder, die man so in der Literatur findet.

Eine Lissajous-Figur ist eine **geschlossene Kurve**, wenn das Frequenzverhältnis eine rationale Zahl ist. Gleiche Frequenzverhältnisse ergeben bei verschiedenen $\omega-$Werten die gleichen Kurven.

Ist die Kurve nicht geschlossen, „bewegt" sie sich dicht im Rechteck mit den Eckpunkten $E_{1,2,3,4}(\pm a_1 \mid \pm a_2)$. Wie in diesem Beispiel:

$$x(t) = 2 \cdot \sin(2t) \text{ und } y(t) = 2 \cdot \sin\left(\sqrt{2} \cdot t + \tfrac{1}{3}\pi\right)$$




Hier habe ich $t \in [0\,;50\pi]$ verwendet. Je größer man das Intervall macht, desto dichter wird das Rechteck von der Kurve belegt. (MatheGrafix!)

# 2 Beispiele

**Beispiel 1** $x(t) = 2 \cdot \sin(t)$ und $y(t) = 2 \cdot \sin(2t)$ für $t \in [0; 2\pi]$

**Zunächst werde ich den Bewegungsablauf durch die Berechnung einiger Kurvenpunkte zeigen.**
Dabei kann man sich unter t die Zeit vorstellen. Ich berechne eine Punktfolge P(t):

t = 0: $x(0) = 2 \cdot \sin(0) = 2 \cdot 0 = 0$
$y(0) = 2 \cdot \sin(0) = 0$ $\quad \Big\}\ P(0) = A(0\,|\,0)$

$t = \frac{1}{4}\pi$: $x\left(\frac{1}{4}\pi\right) = 2 \cdot \sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) = 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = \sqrt{2}$
$y\left(\frac{1}{4}\pi\right) = 2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 2 \cdot 1 = 2$ $\quad \Big\}\ P\left(\frac{1}{4}\pi\right) = B\left(\sqrt{2}\,|\,2\right)$

$t = \frac{1}{2}\pi$: $x\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 2 \cdot 1 = 2$
$y\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 2 \cdot \sin(\pi) = 2 \cdot 0 = 0$ $\quad \Big\}\ P\left(\frac{1}{2}\pi\right) = C(2\,|\,0)$

$t = \frac{3}{4}\pi$: $x\left(\frac{3}{4}\pi\right) = 2 \cdot \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) = 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2} = \sqrt{2}$
$y\left(\frac{3}{4}\pi\right) = 2 \cdot \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 2 \cdot (-1) = -2$ $\quad \Big\}\ P\left(\frac{3}{4}\pi\right) = D\left(\sqrt{2}\,|\,-2\right)$

$t = \pi$: $x(\pi) = 2 \cdot \sin(\pi) = 2 \cdot 0 = 0$
$y(\pi) = 2 \cdot \sin(2\pi) = 0$ $\quad \Big\}\ P(\pi) = A(0\,|\,0)$

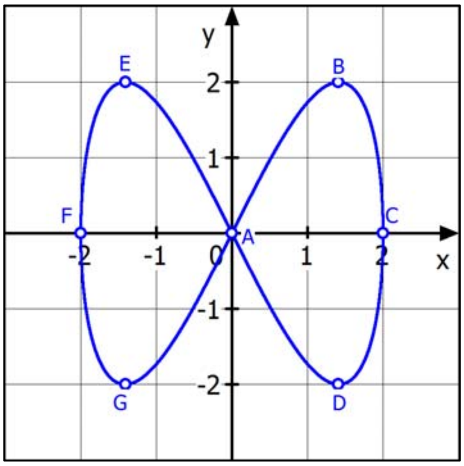
$t = \frac{5}{4}\pi$: $x\left(\frac{5}{4}\pi\right) = 2 \cdot \sin\left(\frac{5}{4}\pi\right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = -\sqrt{2}$
$y\left(\frac{5}{4}\pi\right) = 2 \cdot \sin\left(\frac{5}{2}\pi\right) = 2 \cdot 1 = 2$ $\quad \Big\}\ P\left(\frac{5}{4}\pi\right) = E\left(-\sqrt{2}\,|\,2\right)$

$t = \frac{3}{2}\pi$: $x\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 2 \cdot \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 2 \cdot (-1) = -2$
$y\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 2 \cdot \sin(3\pi) = 2 \cdot 0 = 0$ $\quad \Big\}\ P\left(\frac{3}{2}\pi\right) = F(-2\,|\,0)$

$t = \frac{7}{4}\pi$: $x\left(\frac{7}{4}\pi\right) = 2 \cdot \sin\left(\frac{7}{4}\pi\right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = -\sqrt{2}$
$y\left(\frac{7}{4}\pi\right) = 2 \cdot \sin\left(\frac{7}{2}\pi\right) = 2 \cdot (-1) = -2$ $\quad \Big\}\ P\left(\frac{7}{4}\pi\right) = G\left(-\sqrt{2}\,|\,-2\right)$

$t = 2\pi$: $x(2\pi) = 2 \cdot \sin(2\pi) = 2 \cdot 0 = 0$
$y(2\pi) = 2 \cdot \sin(4\pi) = 0$ $\quad \Big\}\ P(2\pi) = A(0\,|\,0)$

Das **Frequenzverhältnis** ist $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{1}{2}$, also ist die Kurve geschlossen. Die Amplituden sind beide 2, also verläuft die Kurve im Rechteck $E_{1,2,3,4}(\pm 2\,|\,\pm 2)$




## Berechnung einer expliziten Kurvengleichung:

Die Formel $\sin(2t) = 2 \cdot \sin(t) \cdot \cos(t)$ hilft weiter:

$$y = 2 \cdot \sin(2t) = 4 \cdot \sin(t) \cdot \cos(t) \qquad (1)$$

Aus $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos(t) = \pm\sqrt{1 - \sin^2(t)}$

Damit wird (1) zu $\quad y = \pm 4 \cdot \sin t \cdot \sqrt{1 - \sin^2 t} \qquad (2)$

Aus $x = 2 \cdot \sin t$ folgt $\sin t = \frac{x}{2}$.

Das setzt man in (2) ein: $y = \pm 4 \cdot \frac{x}{2} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} = \pm 2x \cdot \sqrt{\frac{4 - x^2}{4}} = \pm x \cdot \sqrt{4 - x^2} \qquad (3)$

mit dem Definitionsbereich $\mathbf{D} = [-2; 2]$. Durch Quadrieren folgt das

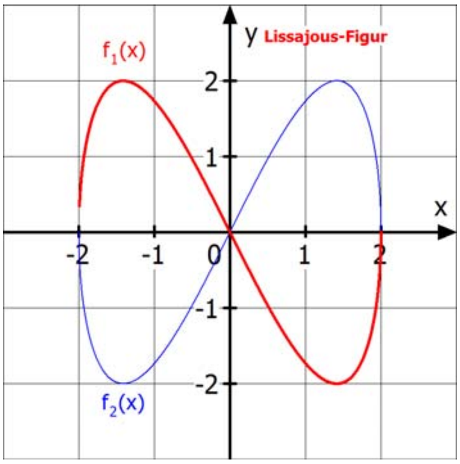
**Ergebnis:** $\boxed{y^2 = x(4 - x^2) \quad \text{bzw.} \quad y^2 = 4x - x^3}$

Diese Gleichung gehört nicht zu einer Funktion, denn man sieht, dass die Zuordnung $x \to y$ nicht eindeutig ist.

Man kann jedoch aus (3) zwei Ersatzfunktionen angeben:

$$f_1(x) = -x \cdot \sqrt{4 - x^2}$$

$$f_2(x) = x \cdot \sqrt{4 - x^2}$$




Im Text 54011 (Differentialgeometrie) wird die Gleichung für den **Krümmungskreis** an der Stelle x = 2 hergeleitet.

Hier die entsprechenden Zeilen:

Ableitungen: $\dot{x}(t) = 2 \cdot \cos(\varphi), \quad \ddot{x}(t) = -2 \cdot \sin(\varphi)$

$\dot{y}(t) = 4 \cdot \cos(2\varphi). \quad \ddot{y}(t) = -8 \cdot \sin(2\varphi)$

Krümmung: $\kappa = \dfrac{\ddot{y} \cdot \dot{x} - \ddot{x} \cdot \dot{y}}{\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right)^{3/2}} = \dfrac{-16 \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(2\varphi) + 8 \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(2\varphi)}{\left[4 \cdot \cos^2(\varphi) + 16 \cdot \cos^2(2\varphi)\right]^{3/2}}$

Die Stelle x = 2 gehört zum Parameterwert t = $\frac{1}{2}\pi$,

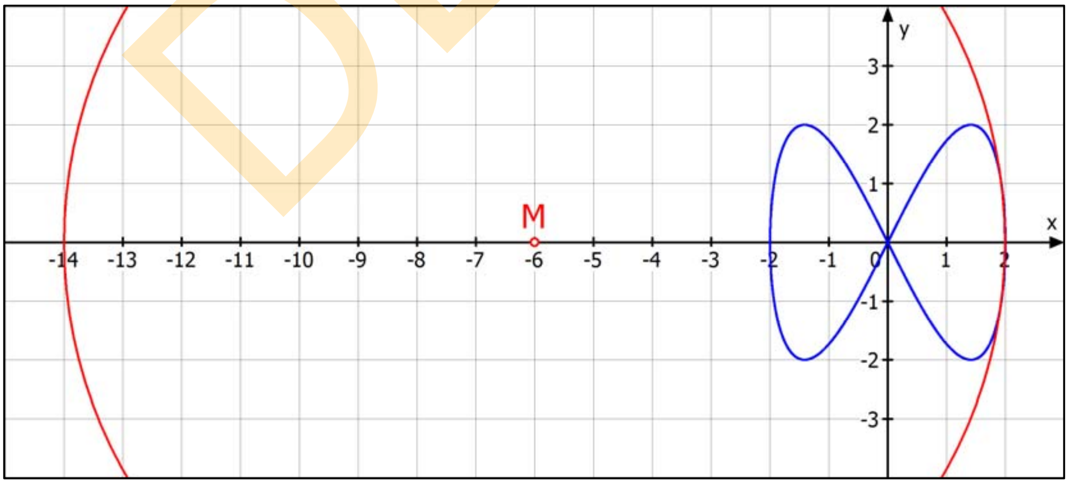
denn $x(t) = 2 \cdot \sin(t) = 2 \iff \sin(t) = 1 \iff t = \frac{1}{2}\pi$

$$\kappa\left(\tfrac{1}{2}\pi\right) = \frac{-16 \cdot \cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) \cdot \sin(\pi) + 8 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) \cdot \cos(\pi)}{\left[4 \cdot \cos^2\left(\frac{1}{2}\pi\right) + 16 \cdot \cos^2(\pi)\right]^{3/2}} = \frac{-16 \cdot 0 \cdot 0 + 8 \cdot 1 \cdot (-1)}{\left[4 \cdot 0 + 16 \cdot 1\right]^{3/2}} = -\frac{-8}{\sqrt{16}^3} = \dots = -\frac{1}{8}$$

Also ist der Krümmungskreisradius: $r = \dfrac{1}{\left|\kappa\left(\frac{1}{2}\pi\right)\right|} = 8$

Und der Krümmungskreismittelpunkt: $M(2 - 8 \mid 0) = (-6 \mid 0)$

Gleichung des Krümmungskreises: $(x + 6)^2 + y^2 = 64$



## Beispiel 2

$x(t) = 2 \cdot \sin(t)$ und $y(t) = 2 \cdot \sin\left(2t - \frac{1}{2}\pi\right)$ für $t \in [0\,;2\pi]$

**Zunächst werde ich den Bewegungsablauf durch die Berechnung einiger Kurvenpunkte zeigen.**
Ich berechne eine Punktfolge P(t):

Die Schwingung beginnt für t = 0: $x(0) = 0$ und $y(0) = 2 \cdot \sin\left(-\frac{1}{2}\pi\right) = -2:$ $P(0) = S(0\,|\,-2)$

Nach einer Viertelperiode, also für $t = \frac{1}{2}\pi$, befindet sich der „Pendelpunkt“ dort:

$$\left.\begin{aligned} x\left(\tfrac{1}{2}\pi\right) &= 2 \cdot \sin\left(\tfrac{1}{2}\pi\right) = 2, \\ y\left(\tfrac{1}{2}\pi\right) &= 2 \cdot \sin\left(\pi - \tfrac{1}{2}\pi\right) = 2 \cdot \sin\left(\tfrac{1}{2}\pi\right) = 2 \end{aligned}\right\} \quad P\left(\tfrac{1}{2}\pi\right) = A(2\,|\,2)$$

Nach einer halben Periode, also für $t = \pi$, befindet sich der „Pendelpunkt“ dort:

$$\left.\begin{aligned} x(\pi) &= 2 \cdot \sin(\pi) = 2 \cdot 0 = 0, \\ y(\pi) &= 2 \cdot \sin\left(2\pi - \tfrac{1}{2}\pi\right) = 2 \cdot \sin\left(-\tfrac{1}{2}\pi\right) = 2 \cdot (-1) = -2: \end{aligned}\right\} \quad P(\pi) = S(0\,|\,-2)$$

Nach $t = \frac{3}{2}\pi$ erreichen wir diesen Punkt:

$$\left.\begin{aligned} x\left(\tfrac{3}{2}\pi\right) &= 2 \cdot \sin\left(\tfrac{3}{2}\pi\right) = 2 \cdot (-1) = -2 \\ y\left(\tfrac{3}{2}\pi\right) &= 2 \cdot \sin\left(3\pi - \tfrac{1}{2}\pi\right) = 2 \cdot \sin\left(\tfrac{5}{2}\pi\right) = 2 \cdot 1 = 2 \end{aligned}\right\} \quad P\left(\tfrac{3}{2}\pi\right) = B(-2\,|\,2)$$

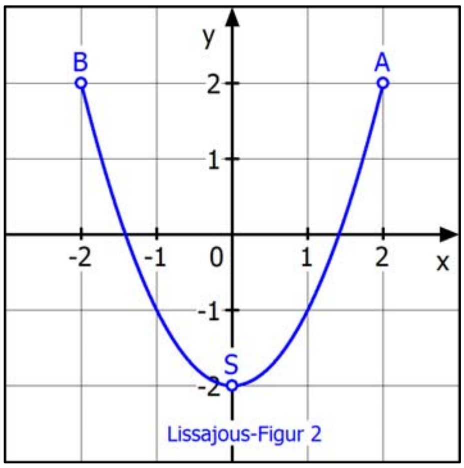
Nach einer ganzen Periode, also für $t = 2\pi$, befindet sich der „Pendelpunkt“ dort:

$$\left.\begin{aligned} x(2\pi) &= 2 \cdot \sin(2\pi) = 2 \cdot 0 = 0, \\ y(2\pi) &= 2 \cdot \sin\left(4\pi - \tfrac{1}{2}\pi\right) = 2 \cdot \sin\left(\tfrac{7}{2}\pi\right) = 2 \cdot (-1) = -2: \end{aligned}\right\} \quad P(\pi) = S(0\,|\,-2)$$

Der „Pendelpunkt“ schwingt also von A über S nach und wieder zurück.
Diese Lissajous-Kurve ist also genau dieser Parabelbogen.

DEMO

## Erstellung der expliziten Kurvengleichung:




Aus $x = 2 \cdot \sin(t)$ folgt $\sin(t) = \frac{1}{2}x$ (1)

Die zweite Gleichung kann man auf zwei Arten umformen:

Mit der Verschiebungsformel $\sin\left(x - \frac{1}{2}\pi\right) = -\cos(x)$,

erhält man $y = 2 \cdot \sin\left(2t - \frac{1}{2}t\right) = -2 \cdot \cos(2t)$ (2)

*Das erreicht man auch mit dem Additionstheorem:*

$\sin(a - b) = 2 \cdot \left[\sin(a) \cdot \cos(b) - \cos(a) \cdot \sin(b)\right]$, nämlich

$$\sin\left(2t - \tfrac{1}{2}\pi\right) = 2 \cdot \left[\sin(2t) \cdot \underbrace{\cos\left(\tfrac{1}{2}\pi\right)}_{0} - \cos(2t) \cdot \underbrace{\sin\left(\tfrac{1}{2}\pi\right)}_{1}\right] = -2 \cdot \cos(2t)$$

Eine weitere Formel für den doppelten Winkel lautet: $\cos(2t) = 1 - 2 \cdot \sin^2(t)$, also gilt

$$y = -2 \cdot \left[1 - 2 \cdot \sin^2(t)\right] = -2 + 4 \cdot \sin^2(t)$$

Setzt man hier (1) ein, erhält man $y = -2 + 4 \cdot \frac{1}{4}x^2$

**Ergebnis:** $y = x^2 - 2$ mit dem Definitionsbereich $\mathbf{D} = \left[x\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -2\,;\,x\left(\frac{1}{2}\right) = +2\right]$

Die Kurve ist also ein **abgeschlossener Parabelbogen**.

**Beispiel 3** $x(t) = 2\cdot\sin t$ und $y(t) = 2\cdot\sin\left(2t - \frac{1}{4}\pi\right)$ für $t \in [0; 2\pi]$

a) Ich berechne hier nur den **Startpunkt der Schwingung**:

$x(0) = 2\cdot 0 = 0$ und $y(0) = 2\cdot\sin\left(-\frac{1}{4}\pi\right) = 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = -\sqrt{2}$

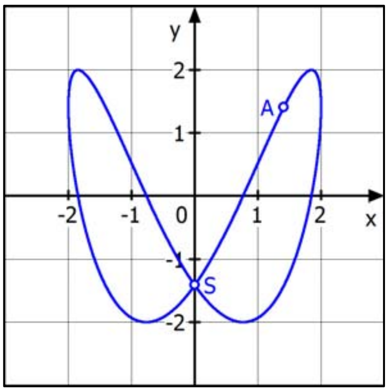
Der „Startpunkt" ist also $S\left(0 \mid -\sqrt{2}\right)$.

Noch ein weiterer Punkt:

$x\left(\frac{1}{4}\pi\right) = 2\cdot\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) = 2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2} = \sqrt{2}$

$y\left(\frac{1}{4}\pi\right) = 2\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{4}\pi\right) = 2\cdot\sin\left(\frac{1}{4}\pi\right) = 2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2} = \sqrt{2}$

Das ergibt $A\left(\sqrt{2} \mid \sqrt{2}\right)$




**b) Zu welchem Parameterwert t gehören die beiden Hochpunkte?**

Bedingung: $y = 2\cdot\sin\left(2t - \frac{1}{4}\pi\right) = 2$ (Das ist aber keine Extremwertbedingung!)

$\sin\left(2t - \frac{1}{4}\pi\right) = 1$

Substitution: $u = 2t - \frac{1}{4}\pi$ ergibt $\sin(u) = 1$

Eine Lösung ist $u_1 = \frac{1}{2}\pi$

Rücksubstitution: $2t - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\pi \Leftrightarrow 2t = \frac{3}{4}\pi \Leftrightarrow t = \frac{3}{8}\pi$

Das ergibt dann $x\left(\frac{3}{8}\pi\right) = 2\cdot\sin\left(\frac{3}{8}\pi\right) \approx 1{,}85$

Hochpunkt: $H_1\left(1{,}85 \mid 2\right)$ für $t = \frac{3}{8}\pi$.

Der linke Hochpunkt entsteht durch die Symmetrie $H_2\left(-1{,}85 \mid 2\right)$ für $t = 2\pi - \frac{3}{8}\pi = \frac{13}{8}\pi$.

**c) Ableitungen:**
$$\dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} 2\cdot\cos(t) \\ 4\cdot\cos\left(2t - \frac{1}{4}\pi\right) \end{pmatrix} \Rightarrow \ddot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -2\cdot\sin(t) \\ -8\cdot\sin\left(2t - \frac{1}{4}\pi\right) \end{pmatrix}$$

Tangentensteigungen:
$$y'(x) = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{4\cdot\cos\left(2t - \frac{1}{4}\pi\right)}{2\cdot\cos(t)}$$

Krümmung:
$$y''(x) = \frac{\ddot{y}(t)\cdot\dot{x}(t) - \ddot{x}(t)\cdot\dot{y}(t)}{\left(\dot{x}(t)\right)^3}$$

**d) „Eigentliche" Berechnung der Extrempunkte (waagrechte / senkrechte Tangenten):**

**Bedingung für waagrechte Tangenten:** $\dot{y}(x) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(2t - \frac{1}{4}\pi\right) = 0$

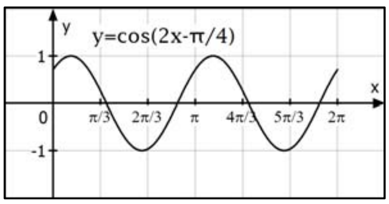
Im Intervall $[0; 2\pi]$ muss dazu gelten:

$2t - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\pi \Leftrightarrow 2t = \frac{3}{4}\pi \Leftrightarrow t = \frac{3}{8}\pi$

Oder: $2t - \frac{1}{4}\pi = \frac{3}{2}\pi \Leftrightarrow 2t = \frac{7}{4}\pi \Leftrightarrow t = \frac{7}{8}\pi$

Oder: $2t - \frac{1}{4}\pi = \frac{5}{2}\pi \Leftrightarrow 2t = \frac{11}{4}\pi \Leftrightarrow t = \frac{11}{8}\pi$

Oder: $2t - \frac{1}{4}\pi = \frac{7}{2}\pi \Leftrightarrow 2t = \frac{15}{4}\pi \Leftrightarrow t = \frac{15}{8}\pi$




Dazu berechnet man nun die Kurvenpunkte und die Krümmungskontrolle:

Zugehörige Kurvenpunkte:

$$t=\tfrac{3}{8}\pi: \qquad \vec{x}\left(\tfrac{3}{8}\pi\right)=\begin{pmatrix}2\cdot\sin\left(\tfrac{3}{8}\pi\right)\\ 2\cdot\sin\left(\tfrac{3}{4}\pi-\tfrac{1}{4}\pi\right)\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}1{,}85\\ 2\end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad H_1(1{,}85\,|\,2)$$

Hinreichende Bedingung: $\ddot{y}\left(\tfrac{3}{8}\pi\right)=-8\cdot\sin\left(2\cdot\tfrac{3}{8}-\tfrac{1}{4}\pi\right)=-8\cdot\sin\left(\tfrac{1}{2}\pi\right)<0$ Maximum.

$$t=\tfrac{7}{8}\pi: \qquad \vec{x}\left(\tfrac{3}{8}\pi\right)=\begin{pmatrix}2\cdot\sin\left(\tfrac{7}{8}\pi\right)\\ 2\cdot\sin\left(\tfrac{7}{4}\pi-\tfrac{1}{4}\pi\right)\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}0{,}765\\ 2\cdot\sin\left(\tfrac{3}{2}\pi\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}765\\ -2\end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad T_1(0{,}765\,|\,-2)$$

Hinreichende Bedingung: $\ddot{y}\left(\tfrac{7}{8}\pi\right)=-8\cdot\sin\left(2\cdot\tfrac{7}{8}-\tfrac{1}{4}\pi\right)=-8\cdot\sin\left(\tfrac{3}{2}\pi\right)>0$ Minimum.

Die beiden anderen Extrempunkte erhält man durch Spiegelung an der y-Achse.

**Bedingung für senkrechte Tangenten:**

$$\dot{x}(t)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \cos(t)=0 \quad\Leftrightarrow\quad t=\tfrac{1}{2}\pi \;\text{ oder }\; t=\tfrac{3}{2}\pi$$

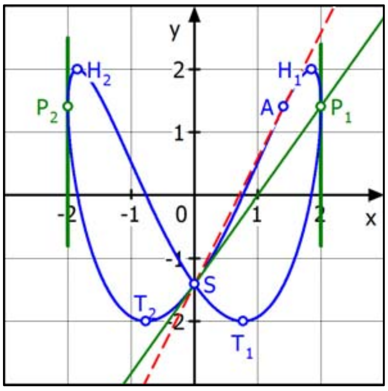
Zugehörige Kurvenpunkte:

$$t=\tfrac{1}{2}\pi: \qquad \vec{x}\left(\tfrac{1}{2}\pi\right)=\begin{pmatrix}2\cdot\sin\left(\tfrac{1}{2}\pi\right)\\ 2\cdot\sin\left(\pi-\tfrac{1}{4}\pi\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 2\cdot\sin\left(\tfrac{3}{4}\pi\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ \sqrt{2}\end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad P_1\left(2\,|\,\sqrt{2}\right)$$

Hinreichende Bedingung: $\ddot{x}\left(\tfrac{1}{2}\pi\right)=-2\cdot\sin\left(\tfrac{1}{2}\pi\right)<0$ Maximum (für x) also Rechtspunkt.

$$t=\tfrac{3}{2}\pi: \qquad \vec{x}\left(\tfrac{3}{2}\pi\right)=\begin{pmatrix}2\cdot\sin\left(\tfrac{3}{2}\pi\right)\\ 2\cdot\sin\left(3\pi-\tfrac{1}{4}\pi\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ 2\cdot\sin\left(\tfrac{11}{4}\pi\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ \sqrt{2}\end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad P_2\left(-2\,|\,\sqrt{2}\right)$$

Hinreichende Bedingung: $\ddot{x}\left(\tfrac{3}{2}\pi\right)=-2\cdot\sin\left(\tfrac{3}{2}\pi\right)>0$ Minimum (für x) also Linkspunkt.




Die Abbildung zeigt die 2 Hochpunkte, 2 Tiefpunkte, den Rechtspunkt und den Linkspunkt.

e) Ferner enthält sie **zwei Tangenten**, die wir jetzt berechnen wollen.

Aufgabe: Berechne die Gleichungen der Tangenten zu $t = 0$ und t)$\tfrac{1}{4}\pi$.

**Kurvenpunkte und Tangenten:**

$$t=0: \qquad \vec{x}(0)=\begin{pmatrix}2\cdot\sin(0)\\ 2\cdot\sin\left(-\tfrac{1}{4}\pi\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 0\\ 2\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ -\sqrt{2}\end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad S\left(0\,|\,-\sqrt{2}\right)$$

Tangentensteigung: $y'(0)=\dfrac{4\cdot\cos\left(-\tfrac{1}{4}\pi\right)}{2\cdot\cos(0)}=\dfrac{4\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{2}}{2\cdot 1}=\dfrac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$

Tangente in S: $y+\sqrt{2}=\sqrt{2}(x-0) \quad\Leftrightarrow\quad \boxed{y=\sqrt{2}x-\sqrt{2}}$

$$t=\tfrac{1}{4}\pi: \qquad \vec{x}\left(\tfrac{1}{4}\pi\right)=\begin{pmatrix}2\cdot\sin\left(\tfrac{1}{4}\pi\right)\\ 2\cdot\sin\left(\tfrac{1}{2}\pi-\tfrac{1}{4}\pi\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\\ 2\cdot\sin\left(\tfrac{1}{4}\pi\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ 2\cdot\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\ \sqrt{2}\end{pmatrix}$$ Das ergibt $A\left(\sqrt{2}\,|\,\sqrt{2}\right)$

Tangentensteigung: $y'\left(\tfrac{1}{4}\pi\right)=\dfrac{4\cdot\cos\left(\tfrac{1}{2}\pi-\tfrac{1}{4}\pi\right)}{2\cdot\cos\left(\tfrac{1}{4}\pi\right)}=\dfrac{2\cdot\cos\left(\tfrac{1}{4}\pi\right)}{\cos\left(\tfrac{1}{4}\pi\right)}=2$

Tangente in A: $y-\sqrt{2}=2\left(x-\sqrt{2}\right) \quad\Leftrightarrow\quad \boxed{y=2x-\sqrt{2}}$

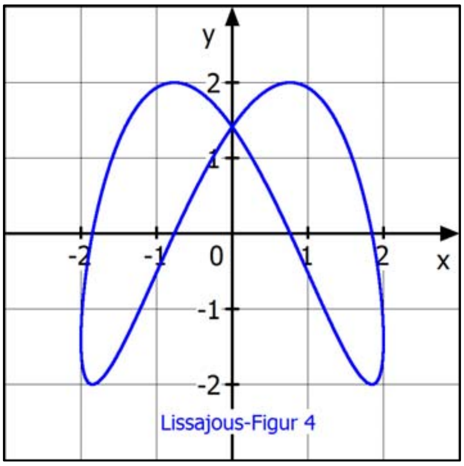
DEMO

**Beispiel 4** $x(t) = 2 \cdot \sin t$ und $y(t) = 2 \cdot \sin\left(2t + \frac{1}{4}\pi\right)$ für $t \in [0\,;\,2\pi]$

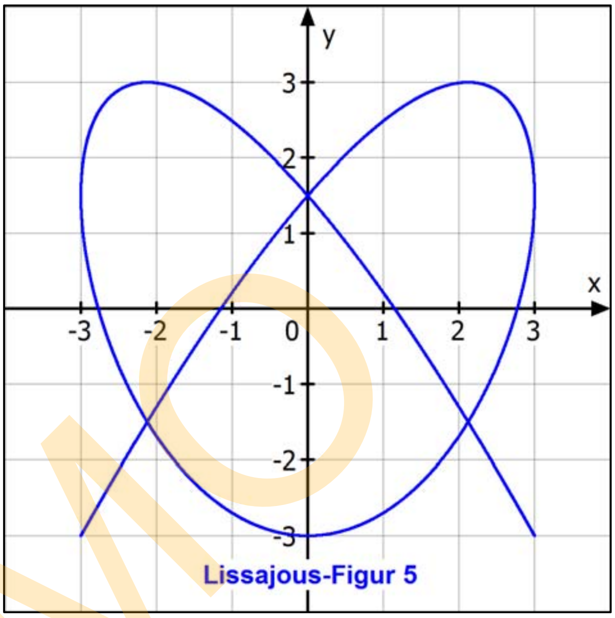
**Beispiel 5** $x(t) = 3 \cdot \sin(3t)$ und $y(t) = 3 \cdot \sin\left(4t - \frac{1}{2}\pi\right)$ für $t \in [0\,;\,2\pi]$

**Beispiel 6** $x(t) = 3 \cdot \sin(3t)$ und $y(t) = 3 \cdot \sin\left(4t - \frac{5}{12}\pi\right)$ für $t \in [0\,;\,2\pi]$

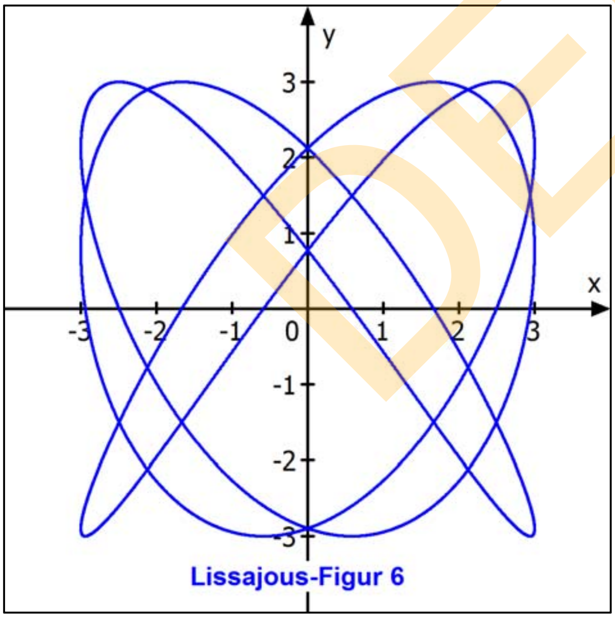
**Beispiel 7** $x(t) = 3 \cdot \sin(5t)$ und $y(t) = 3 \cdot \sin(2t)$ für $t \in [0\,;\,2\pi]$



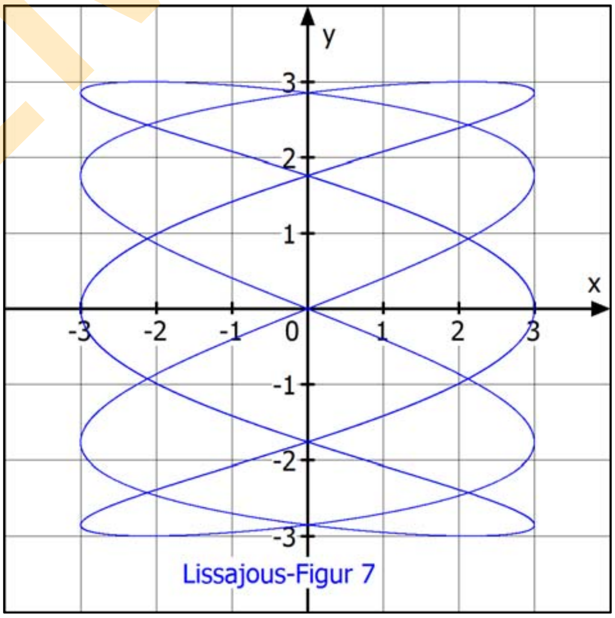
Lissajous-Figur 4



Lissajous-Figur 5



Lissajous-Figur 6



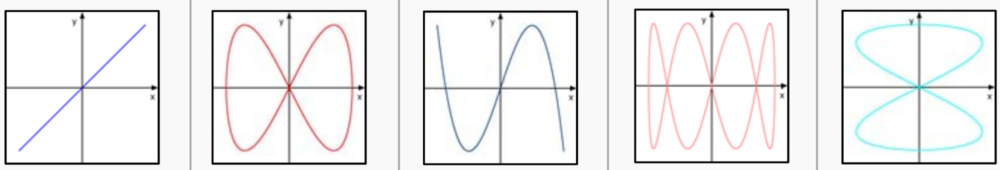
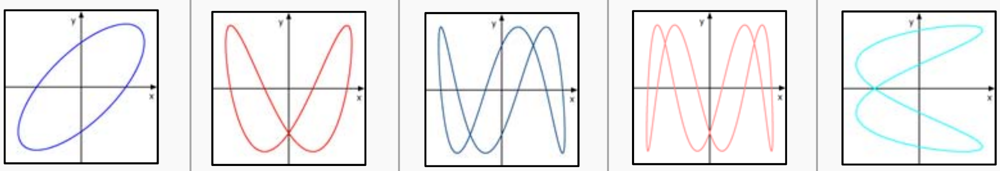
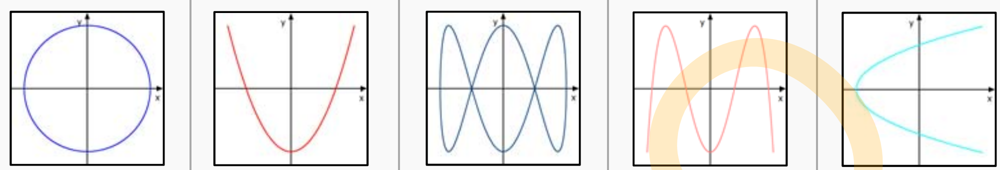
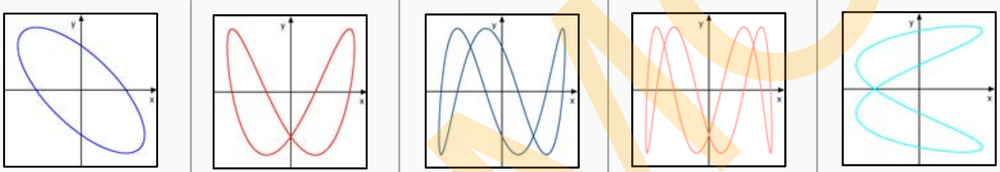
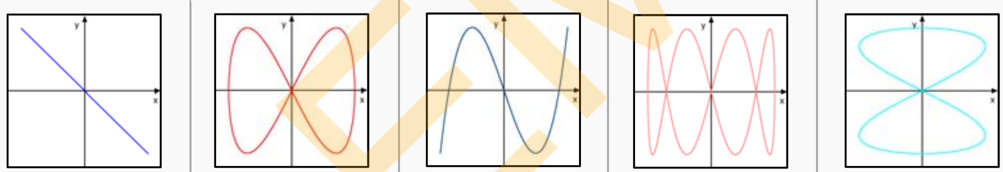
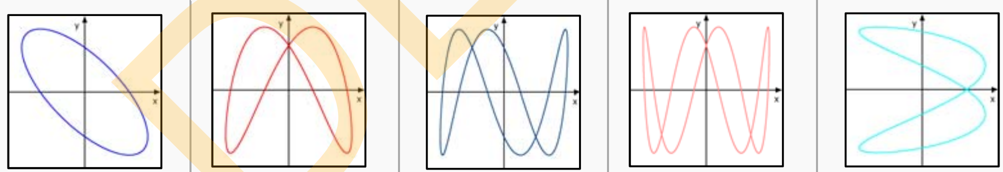
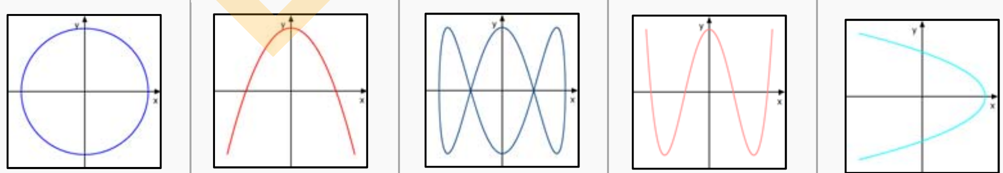
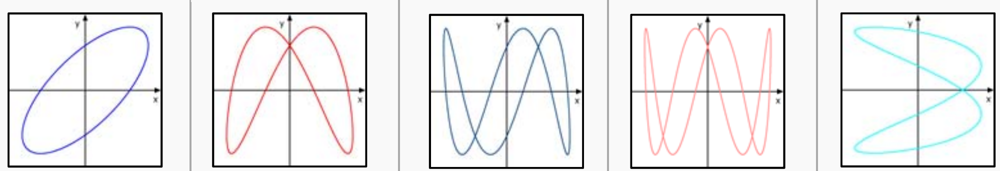
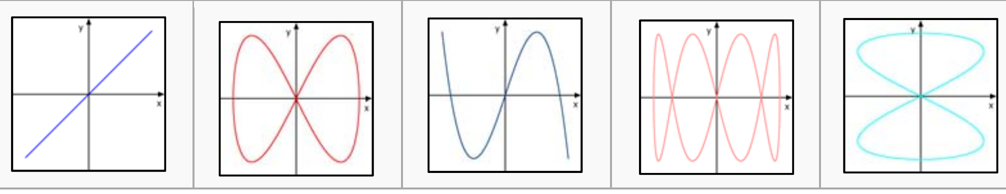
Lissajous-Figur 7

DEMO

# 3 Formenübersicht

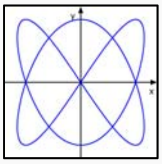
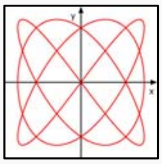
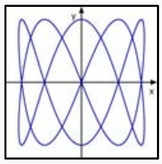
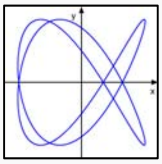
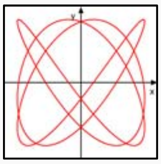
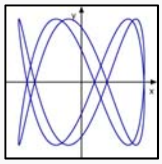
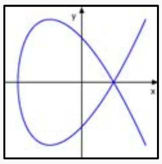
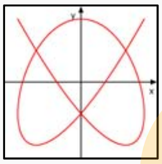
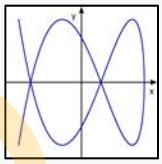
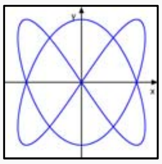
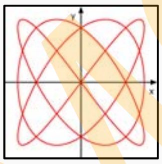
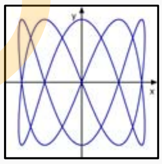
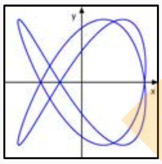
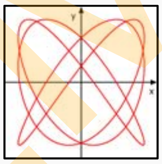
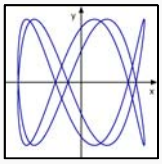
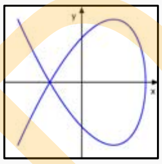
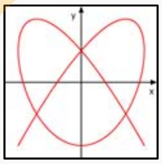
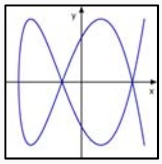
In den Spalten haben wir konstantes Frequenzverhältnis $\omega_1 / \omega_2$

In den Zeilen die relative Phasendifferenz $\varphi$ der beiden Schwingungen zueinander.

| $\varphi$ | 1:1 | 1:2 | 1:3 | 1:4 | 2:1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $0$ |  | | | | |
| $\frac{\pi}{4}$ |  | | | | |
| $\frac{\pi}{2}$ |  | | | | |
| $\frac{3}{4}\pi$ |  | | | | |
| $\pi$ |  | | | | |
| $\frac{5}{4}\pi$ |  | | | | |
| $\frac{3}{2}\pi$ |  | | | | |
| $\frac{7}{4}\pi$ |  | | | | |
| $2\pi$ |  | | | | |
| | $x = a \cdot \sin(t)$<br>$y = a \cdot \sin(t - \varphi)$ | $x = a \cdot \sin(t)$<br>$y = a \cdot \sin(2t - \varphi)$ | $x = a \cdot \sin(t)$<br>$y = a \cdot \sin(3t - \varphi)$ | $x = a \cdot \sin(t)$<br>$y = a \cdot \sin(4t - \varphi)$ | $x = a \cdot \sin(2t - \varphi)$<br>$y = a \cdot \sin(t)$ |

DEMO

Abbildungen für das Frequenzverhältnis $n_1:n_2$ (Amplitudenverhältnis 1:1)

| φ | 2:3 | φ | 3:4 | φ | 2:5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 |  | 0 |  | 0 |  |
| $\frac{1}{3}\pi$ |  | $\frac{1}{12}\pi$ oder $\frac{3}{12}\pi$ |  | $\frac{2}{12}\pi$ oder $\frac{4}{12}\pi$ |  |
| $\frac{1}{4}\pi$ |  | $\frac{1}{6}\pi$ |  | $\frac{3}{12}\pi$ |  |
| $\frac{1}{2}\pi$ oder $\pi$ |  | $\frac{1}{3}\pi$ oder $\frac{2}{3}\pi$ |  | $\frac{1}{2}\pi$ |  |
| $\frac{4}{6}\pi$ oder $\frac{5}{6}\pi$ |  | $\frac{5}{12}\pi$ oder $\frac{7}{12}\pi$ |  | $\frac{8}{12}\pi$ |  |
| $\frac{3}{4}\pi$ |  | $\frac{1}{2}\pi$ |  | $\frac{9}{12}\pi$ |  |

DEMO

Wie kann man aus diesen Daten eine Kurvengleichung erstellen?

Man geht z. B. von diesen Gleichungen aus:

$$x(t) = a_1 \cdot \sin(\omega_1 t) \text{ und } y(t) = a_2 \cdot \sin(\omega_2 t - \varphi) \text{ für } t \in [0;2\pi]$$

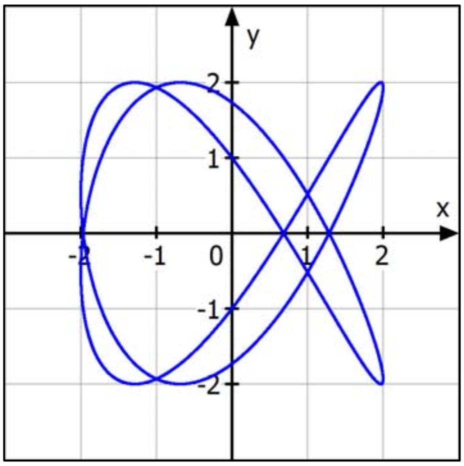
Um die Kurve mit der Phasendifferenz $\varphi = \frac{1}{3}\pi$ und dem Frequenzverhältnis 2:3 zu erhalten, wähle ich z. B. $\omega_1 = 2$ und $\omega_2 = 3$ und erhalte:

$$x(t) = a_1 \cdot \sin(2t) \text{ und } y(t) = a_2 \cdot \sin\left(3t - \tfrac{1}{3}\pi\right) \text{ für } t \in [0;2\pi]$$

Die Größe der Kurve hängt davon ab, wie ich $a_1$ und $a_2$ wähle. Sie sie gleich groß, liegt die Kurve in einem Quadrat der Seitenlänge $a_1$, sind sie verschieden, dann liegt sie in einem Rechteckt und ist gegenüber der Quadrat-Darstellung gestreckt:

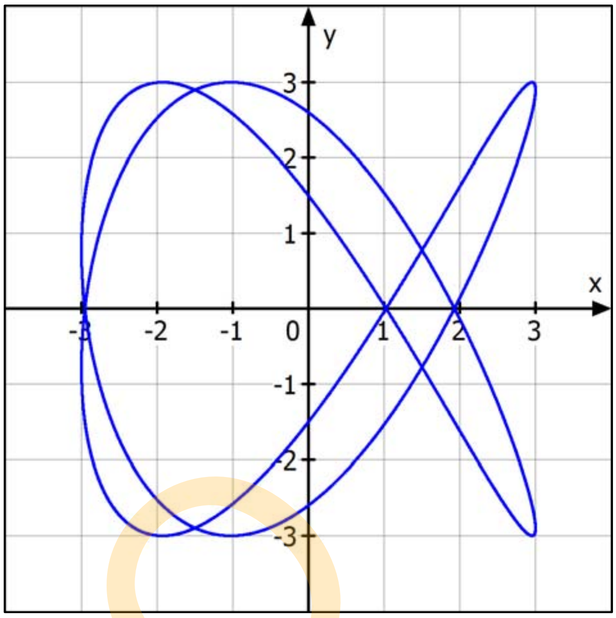
Ich habe alle Abbildungen mit MatheGrafix erstellt und dabei $a_1 = a_2 = 2{,}5$ gewählt.

(a) $x(t) = 2 \cdot \sin(2t)$ und $y(t) = 2 \cdot \sin\left(3t - \frac{1}{3}\pi\right)$

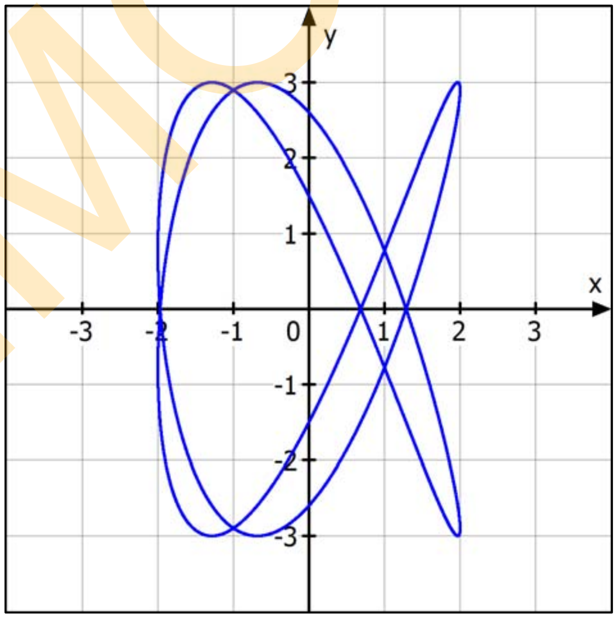



Hier: Gleiche Form nur vergrößert.

(b) $x(t) = 3 \cdot \sin(2t)$ und $y(t) = 3 \cdot \sin\left(3t - \frac{1}{3}\pi\right)$




(c) $x(t) = 2 \cdot \sin(2t)$ und $y(t) = 3 \cdot \sin\left(3t - \frac{1}{3}\pi\right)$




Wenn man $\omega$ so verändert, dass das Frequenzverhältnis gleich bleibt, ändert sich die Kurve nicht:

(d) $x(t) = 2 \cdot \sin(10t)$ und $y(t) = 2 \cdot \sin\left(15t - \frac{1}{3}\pi\right)$

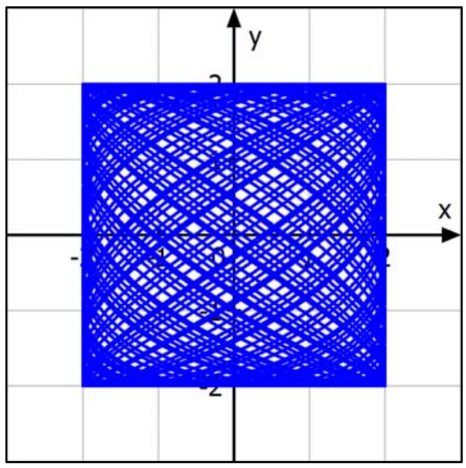
Hier: Gleiche Schaubilder

DEMO

Zum Schluss noch eine Figur, die keine geschlossene Kurve ist, weil das Frequenzverhältnis nicht rational ist:

(d) $x(t) = 2 \cdot \sin(2t)$ und $y(t) = 2 \cdot \sin\left(\sqrt{2} \cdot t + \frac{1}{3}\pi\right)$

Hier habe ich $t \in [0\,;\,50\pi]$ verwendet. Je größer man das Intervall macht, desto dichter wird das Rechteck von der Kurve belegt. (MatheGrafix!)



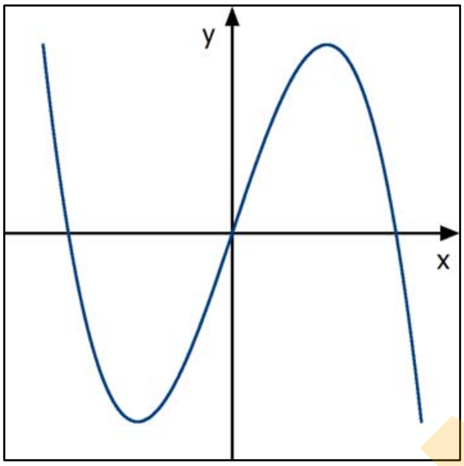
# 4 Wichtige Aufgaben

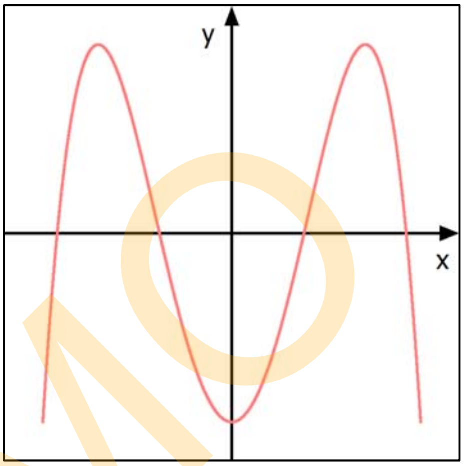
Stelle die Koordinatengleichungen für diese Kurven für $t \in [0\,;2\pi[$ auf:

a) $\begin{Bmatrix} x = a \cdot \sin(t) \\ y = a \cdot \sin(3t) \end{Bmatrix}$

b) $\begin{Bmatrix} x = a \cdot \sin(t) \\ y = a \cdot \sin\left(4t - \frac{1}{2}\pi\right) \end{Bmatrix}$

Berechne auch die **Extrempunkte** (in x- und y-Richtung) und zwar aus der Parametergleichung.




Anleitung findet man auf Seite 6 unten.
Die Lösungen beginnen auf der nächsten Seite.

DEMO

## Lösung für a)

$$\left\{\begin{array}{l} x = a\cdot\sin(t) \\ y = a\cdot\sin(3t) \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l}(1)\\(2)\end{array}$$

In der Formelsammlung steht dies: $\sin(3\alpha) = 3\cdot\sin(\alpha) - 4\cdot\sin^3(\alpha)$

Damit folgt aus (2): $y = 3a\cdot\sin(t) - 4a\cdot\sin^3(t)$

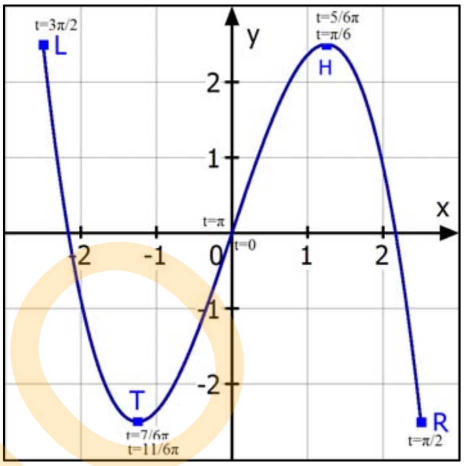
Aus (1) folgt: $\sin(t) = \frac{x}{a}$

Dies setzt man ein: $y = 3a\cdot\frac{x}{a} - 4a\cdot\frac{x^3}{a^3}$

Nach Kürzen erhält man: $y = 3x - \frac{4}{a^2}x^3$

Im Beispiel war a = $\frac{5}{2}$ : $y = -\frac{4}{\frac{25}{4}}x^3 + 3x$

$$y = -\frac{16}{25}x^3 + 3x$$




Nun muss aber der Definitionsbereich eingeschränkt werden, denn die Lissajousfigur hat ja einen linken Endpunkt $L(-2{,}5\,|\,2{,}5)$ und einen rechten Endpunkt $R(2{,}5\,|\,-2{,}5)$.

Die Kurve wird für das Intervall $[0\,;2\pi[$ genau zweimal durchlaufen. Für t = 0 beginnt man im Ursprung, für $t = \frac{1}{6}\pi$ erreicht man den Hochpunkt (s. u.), für t = $\frac{1}{2}\pi$ den Punkt R. Für t von $\frac{1}{2}\pi$ bis $t = \frac{3}{2}\pi$ wird die ganze Kurve „rückwärts", also von R nach L durchlaufen. Für t von $\frac{3}{2}\pi$ bis $t = 2\pi$ wird dann der Bogen von L bis zum Ursprung nochmals durchlaufen.

Der Definitionsbereich für die Kurve in Koordinatendarstellung lautet also $\mathbf{D} = [-2{,}5\,;2{,}5]$.

**Berechnung der Extrempunkte für** $\left\{\begin{array}{l} x = 2{,}5\cdot\sin(t) \\ y = 2{,}5\cdot\sin(3t) \end{array}\right\}$

Ableitungen: $\left\{\begin{array}{l} \dot{x}(t) = 2{,}5\cdot\cos(t) \\ \dot{y}(t) = 7{,}5\cdot\cos(3t) \end{array}\right\}, \quad \left\{\begin{array}{l} \ddot{x}(t) = -2{,}5\cdot\sin(t) \\ \ddot{y}(t) = -22{,}5\cdot\sin(3t) \end{array}\right\}$

<u>Bedingung für die y-Richtung:</u> $\dot{y}(t) = 0 \;\Leftrightarrow\; \cos(3t) = 0 \;\Leftrightarrow\; \left\{\begin{array}{lll} 3t = \frac{1}{2}\pi & \Rightarrow & t_1 = \frac{1}{6}\pi \\ 3t = \frac{3}{2}\pi & \Rightarrow & t_2 = \frac{1}{2}\pi \\ 3t = \frac{5}{2}\pi & \Rightarrow & t_3 = \frac{5}{6}\pi \\ 3t = \frac{7}{2}\pi & \Rightarrow & t_4 = \frac{7}{6}\pi \\ 3t = \frac{9}{2}\pi & \Rightarrow & t_5 = \frac{3}{2}\pi \\ 3t = \frac{11}{2}\pi & \Rightarrow & t_6 = \frac{11}{6}\pi \end{array}\right\}$

*Jetzt erst hat t das ganze Intervall* $[0\,;2\pi[$ *durchlaufen.*

Kurvenpunkte: $\left\{\begin{array}{l} x\left(\frac{1}{6}\pi\right) = 2{,}5\cdot\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) = 1{,}25 \\ y\left(\frac{1}{6}\pi\right) = 2{,}5\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 2{,}5 \end{array}\right\}$ Kontrolle: $\ddot{y}\left(\frac{1}{6}\pi\right) = -22{,}5\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) < 0 \;\Rightarrow\; H(1{,}25\,|\,2{,}5)$

$\left\{\begin{array}{l} x\left(\frac{7}{6}\pi\right) = 2{,}5\cdot\sin\left(\frac{7}{6}\pi\right) = -1{,}25 \\ y\left(\frac{7}{6}\pi\right) = 2{,}5\cdot\sin\left(\frac{7}{2}\pi\right) = -2{,}5 \end{array}\right\}$ Kontrolle: $\ddot{y}\left(\frac{7}{6}\pi\right) = -22{,}5\cdot\sin\left(\frac{7}{2}\pi\right) > 0 \;\Rightarrow\; T(-1{,}25\,|\,-2{,}5)$

Die Werte $\frac{5}{6}\pi$ und $\frac{11}{6}\pi$ führen ein zweites Mal zu H und T.

DEMO

**Sehr wichtig für das Verständnis dieser Theorie sind die Werte** $t_2 = \frac{1}{2}\pi$ und $t_5 = \frac{3}{2}\pi$

Man sollte sich jetzt nochmals ins Gedächtnis zurückrufen, dass diese Kurve auch die Gleichung $y = -\frac{16}{25}x^3 + 3x$ hat. Diese ganzrationale Funktion 3. Grades hat genau zwei Extrempunkte, und zwar mit waagerechter Tangente.

Beschränkt man diese Kurve jedoch auf den Definitionsbereich $\mathbf{D} = [-2{,}5\,;\,2{,}5]$ (s. o.), dann hat die Kurve zwei Randextrempunkte, die aber keine waagerechte Tangente haben.

Bei ganzrationalen Funktionen würde man das so beweisen:

> Gilt am rechten Rand $f'(x_R) < 0$, dann liegt ein rechter Randtiefpunkt vor,
> gilt am linken Rand $f'(x_L) < 0$, dann liegt ein rechter Randhochpunkt vor.

**Bei Parameterkurven** bedeutet die Bedingung $\dot{y}(t) = 0$ und $\ddot{y}(t) > 0$ nicht Tiefpunkt mit waagerechter Tangente, sondern minimaler y-Wert mit eventuell schräger Tangente.

Rechnen wir nach:

$$\left\{\begin{array}{l} x\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 2{,}5 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 2{,}5 \\ y\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 2{,}5 \cdot \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -2{,}5 \end{array}\right\} \quad \text{Kontrolle: } \ddot{y}\left(\tfrac{1}{2}\pi\right) = -22{,}5 \cdot \sin\left(\tfrac{3}{2}\pi\right) > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{minimaler y-Wert.}$$

Und das ist der rechte Randtiefpunkt $R(2{,}5\,|\,-2{,}5)$

Entsprechend folgt:

$$\left\{\begin{array}{l} x\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 2{,}5 \cdot \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -2{,}5 \\ y\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 2{,}5 \cdot \sin\left(\frac{9}{2}\pi\right) = 2{,}5 \end{array}\right\} \quad \text{Kontrolle: } \ddot{y}\left(\tfrac{3}{2}\pi\right) = -22{,}5 \cdot \sin\left(\tfrac{9}{2}\pi\right) < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{maximaler y-Wert.}$$

Und das ist der links Randhochpunkt $L(-2{,}5\,|\,2{,}5)$

<u>Bedingung für die x-Richtung:</u> $\dot{x}(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} t_2 = \frac{1}{2}\pi \\ t_5 = \frac{3}{2}\pi \end{array}\right\}$

Kurvenpunkte:

$$\left\{\begin{array}{l} x\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 2{,}5 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 2{,}5 \\ y\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 2{,}5 \cdot \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -2{,}5 \end{array}\right\} \quad \text{Kontrolle: } \ddot{x}\left(\tfrac{1}{2}\pi\right) = -2{,}5 \cdot \sin\left(\tfrac{1}{2}\pi\right) < 0 \quad \Rightarrow \text{maximaler x-Wert.}$$

$$\left\{\begin{array}{l} x\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 2{,}5 \cdot \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -2{,}5 \\ y\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 2{,}5 \cdot \sin\left(\frac{9}{2}\pi\right) = 2{,}5 \end{array}\right\} \quad \text{Kontrolle: } \ddot{x}\left(\tfrac{3}{2}\pi\right) = -2{,}5 \cdot \sin\left(\tfrac{3}{2}\pi\right) > 0 \quad \Rightarrow \text{minimaler x-Wert.}$$

Man erhält so den rechten Randpunkt (also den Kurvenpunkt mit maximaler x-Koordinate) und den linken Randpunkt (also den Kurvenpunkt mit minimaler x-Koordinate).

Es ist Zufall, dass bei dieser Kurve diese beiden Kurvenpunkte Extrempunkte in x-Richtung <u>und</u> in y-Richtung sind.

DEMO

# Lösung für b)

Gegeben: $\left\{\begin{array}{ll} x = a\cdot\sin(t) & (1) \\ y = a\cdot\sin\left(4t-\tfrac{1}{2}\pi\right) & (2) \end{array}\right\}$

1. Schritt: Zerlegung mit der Formel $\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$:

$$\sin\left(4t-\tfrac{1}{2}\pi\right) = \sin(4t)\underbrace{\cos\left(\tfrac{1}{2}\pi\right)}_{=0} - \cos(4t)\underbrace{\sin\left(\tfrac{1}{2}\pi\right)}_{=1} = -\cos(4t)$$

2. Schritt: Zerlegung von $\cos(4t)$. Es gibt dazu eine fertige Formel, doch die steht nicht überall.

Man findet jedoch $\cos(2t) = \cos^2(t) - \underbrace{\sin^2(t)}_{=1-\cos^2(t)} = 2\cos^2(t) - 1$.

Diese wende ich so an: $\cos(4t) = \cos\left(2\cdot\boxed{2t}\right) = 2\cdot\left[\cos\boxed{2t}\right]^2 - 1$

Nochmals angewandt: $\cos(4t) = 2\cdot\left[2\cos^2(t)-1\right]^2 - 1 = 2\cdot\left[4\cos^4(t) - 4\cdot\cos(t) + 1\right] - 1$

$$\cos(4t) = 8\cdot\cos^4(t) - 8\cdot\cos^2(t) + 1$$

*(Siehe auch Bronstein-Semendjajew: Taschenbuch der Mathematik).*

3. Schritt: Umformung von (2): $y = -a\cdot\left(8\cdot\cos^4(t) - 8\cdot\cos^2(t) + 1\right)$ (3)

4. Schritt: Jetzt muss man sin und cos aus (1) und (3) eliminieren. Dazu muss man nun erst noch (3) so umformen, dass sin statt cos auftritt. Ich ersetze also $\cos^2(t) = 1 - \sin^2(t)$:

$$y = -a\cdot\left(8\cdot\left[1-\sin^2(t)\right]^2 - 8\cdot\left[1-\sin^2(t)\right] + 1\right)$$

$$y = -a\cdot\left(8\cdot\left[1-2\cdot\sin^2(t)+\sin^4(t)\right] - 8\cdot\left[1-\sin^2(t)\right] + 1\right)$$

Neu sortieren: $y = -a\cdot\left(\left[8-16\cdot\sin^2(t)+8\sin^4(t)\right] - \left[8-8\sin^2(t)\right] + 1\right)$

$$y = -a\cdot\left(8\cdot\sin^4(t) - 8\cdot\sin^2(t) + 1\right) \qquad (4)$$

Also heißt jetzt unsere Parametergleichung: $\left\{\begin{array}{ll} x = a\cdot\sin(t) & (1) \\ y = -a\cdot\left(8\cdot\sin^4(t) - 8\cdot\sin^2(t) + 1\right) & (4) \end{array}\right\}$

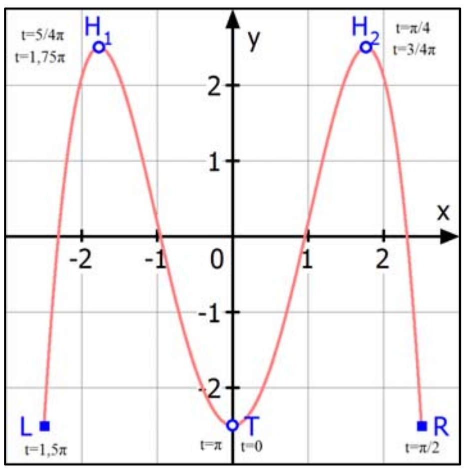
5. Schritt: Elimination von sin(t):

Aus (1) folgt: $\sin(t) = \dfrac{x}{a}$

In (4): $y = -a\cdot\left(8\cdot\dfrac{x^4}{a^4} - 8\cdot\dfrac{x^2}{a^2} + 1\right)$

bzw. $y = -8\cdot\dfrac{x^4}{a^3} + 8\cdot\dfrac{x^2}{a} - a$

Für a = 2,5: $y = -0{,}512\cdot x^4 + 3{,}2\cdot x - 2{,}5$




Wer Kurven 4. Grades kennt, konnte ahnen, dass eine solche Kurve hier vorliegt. Sie hat genau wie in Aufgabe a) den Definitionsbereich $\mathbf{D} = [-2{,}5\,;\,2{,}5]$. Und man kann genauso die Extrempunkte wie dort berechnen. Ich habe die zugehörenden t-Werte eingetragen, die Koordinaten sind

$H_{1,2} \approx (\pm 1{,}768 \mid 2{,}5)$, $R(2{,}5 \mid -2{,}5)$, $L(-2{,}5 \mid -2{,}5)$, $T(0 \mid -2{,}5)$.

DEMO